$$\frac{2x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}$$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 2$

D : y = 2 est une asymptote horizontale à Cf au voisinage de $+\infty$.

4°/ $d(x) = f(x) - y = \dfrac{2x+\cos x}{x+1} - 2 = \dfrac{2x+\cos x-2x-2}{x+1}$

$$= \frac{\cos x - 2}{x+1}$$

On a : pour tout $x \in Df$: $\cos x - 2 < 0$

• pour $x \in]-\infty, -1[$: $d(x) > 0$

d'où Cf est au dessus de Δ sur $]-1, +\infty[$

• pour $x \in]-1, +\infty[$: $d(x) < 0$

$\Rightarrow Cf$ est au dessous de Δ sur $]-1, +\infty[$

5°/ on a : $2x - 1 \leq 2x + \cos x \leq 2x + 1$

pour $x < -1$ on a : $x + 1 < 0$

d'où : $\forall x < -1$: $\dfrac{2x+1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{2x-1}{x+1}$

on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x+1} = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$

d'où $\lim\limits_{-\infty} f = 2$

Solution 14 :

1°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(1+x^2-1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$